

PERCHE' NON ESISTONO ASSI DI ORDINE 5 NEI CRISTALLI?

Alessandro Lenzi
Museo di Storia Naturale di Rosignano Solvay MuSNa
Via De Filippo 6 Rosignano Marittimo (LI)
musrosi@gmail.com

Introduzione

Una delle caratteristiche che più colpisce di un minerale è, senza dubbio, la 'regolarità'. Un insieme di cristalli, osservato in qualche collezione o al microscopio, presenta superfici e contorni, le così dette facce, che evidenziano un ordine, un 'non troppo caotico' che mette in luce quella che si chiama simmetria. Le facce sono disposte a formare angoli caratteristici ed orientate l'una rispetto all'altra in modo da mostrare quella 'regolarità' che abbiamo intuitivamente introdotto e che nel linguaggio scientifico, si chiama simmetria. In alcuni cristalli certe facce si somigliano a tal punto da essere distinguibili solo perché disposte ad angoli diversi l'una dall'altra. Se sottoponessimo queste facce a delle rotazioni intorno ad un asse o a delle riflessioni ci accorgeremmo che queste andrebbero ad occupare i posti di un'altra faccia senza poterla distinguere dalla posizione precedente, rimanendo distinte solo dal fatto di avere assistito alla rotazione o alla riflessione ed osservato il risultato.

Nel caso della rotazione, questa operazione speciale che lascia indistinguibili certe facce, si chiama asse di simmetria. Sostanzialmente ci dice che, ruotando il cristallo, le facce si dispongono in posizioni indistinguibili dalla posizione originaria. Analogamente alla rotazione si potranno avere altre operazioni che lasciano apparentemente 'invariato il sistema'; avremo piani di riflessione, assi di inversione ed altre operazioni che conosceremo in dettaglio più avanti.

Un qualunque cristallo è formato dalla disposizione ordinata nello spazio di più atomi di uno o più elementi chimici. È quindi logico aspettarsi che le proprietà di simmetria, che abbiamo immaginato quasi dall'esterno, debbano necessariamente essere vere anche a livello macroscopico. Vedremo più avanti che certe disposizioni delle facce in grandi cristalli, oltre a rappresentare la simmetria macroscopica sono anche una combinazione di facce conseguente all'accrescimento del cristallo e, talvolta possono nascondere certe simmetrie, o aggiungerne altre apparenti. Si parla in questi casi di sovra-simmetria o di sotto-simmetria.

Il complesso di proprietà che mostra un cristallo, con quello che abbiamo appena detto, le reali proprietà della parte microscopica di esso, si chiama proprietà di simmetria del cristallo.

Simmetrie nel piano

Tracciare una forma regolare su un foglio di carta è sicuramente capitato a tutti. Quadratini colorati e non disposti in modo regolare, segmenti uniti, alternati e disposti con ordine, sono lo 'scarabocchio' tipico di molti. Ma forse non tutti sanno che le figure che si possono tracciare su un piano e che possono essere disposte regolarmente in modo da presentare delle simmetrie sono poche.

L'argomento 'simmetria' richiede una trattazione ben più ampia di una semplice nota come quella qui presentata. Ma comunque vogliamo qui trattare una proprietà particolare che presentano gli assi di simmetria e daremo quindi per scontato che il lettore conosca almeno minimamente alcuni concetti di simmetria e di reticoli cristallini. La proprietà che osserveremo è l'assenza di assi di ordine 5 nei reticoli

cristallini. Mostriamo questa proprietà con l'ausilio della matematica seguendo l'esempio di illustri scienziati che in passato hanno trattato questo tema. In particolare, la dimostrazione che faremo è ispirata alla trattazione di Lev Davidovič Landau¹ e Evgenij Michajlovič Lifšic

Descrizione

Dobbiamo immaginare un cristallo ideale come una serie infinita e periodica di atomi disposti nello spazio. Questa regolarità sarà accompagnata dalla presenza di assi e piani di simmetria che costituiscono il gruppo puntuale di simmetria del reticolo cristallino. Queste proprietà descrivono assi e piani di simmetria che lasciano invariato il reticolo per rotazione o per riflessione attorno a tali elementi di simmetria. In ogni caso sia le rotazioni che le riflessioni lasciano fermo almeno un punto del cristallo da cui il nome di simmetrie puntuali. Per un cristallo ideale si devono aggiungere altre proprietà di simmetria costituite dalle operazioni che lasciano invariato e quindi indistinguibile il cristallo attraverso una traslazione dell'intero reticolo lungo un asse di riferimento detto appunto asse traslazionale. I cristalli possiedono sia proprietà simmetriche dei gruppi puntuali a cui appartengo sia di proprietà traslazionali.

Per capire quali possibili assi di simmetria rotazionale siano possibili, ossia compatibili con la presenza di piani di simmetria traslazionale si supponga di osservare la figura 1 sotto riportata:

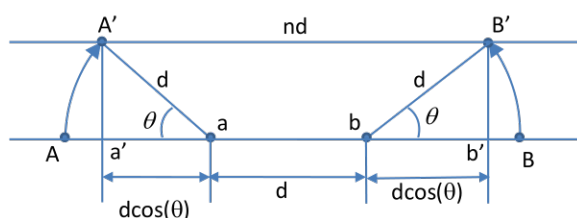


Figura 1: punti di un reticolo ed i loro corrispettivi generati nelle operazioni di rotazione

La rotazione del punto B intorno al punto b di un angolo θ , ammesso dalla simmetria del sistema, porta alla posizione B' che corrisponde ad un punto del reticolo cristallino. Analogamente la rotazione di un angolo θ del punto A rispetto all'asse di rotazione passante per il punto a porta questo ad occupare la posizione A' anch'essa appartenente al reticolo cristallino. I punti A' e B' giaceranno su un elemento di simmetria del sistema corrispondente ad un asse traslazionale, cioè un asse del reticolo contenente dei punti legato tra loro da una relazione di periodicità. Nel caso specifico il ripetersi periodico e costante di una distanza d tra un punto del reticolo ed il successivo.

Sarà pertanto vero che la distanza tra i punti A' e B' dovrà corrispondere ad un numero intero di volte la distanza minima reticolare d. Sarà quindi rispettata la relazione:

$$A'B' = nd$$

La distanza A'B' può essere calcolata anche considerando le proiezioni dei punti A' e B' sull'asse traslazionale di partenza. Osservando la figura 1 questa distanza è data dalla relazione:

$$A'B' = 2d \cos \theta + d = nd$$

Che risulta da:

¹ L. D. Landau, E. M. Lifshits, Fisica Teorica 5, Fisica Statistica parte I, pp. 442-489, Editori Riuniti Edizioni

$$\cos \theta = \frac{n-1}{2}$$

Dove teta è l'angolo di cui si può ruotare il reticolo attorno ad un punto ed ottenere posizioni equivalenti alla iniziale. La rotazione potrà essere ripetuta un numero intero di volte e fino raggiungere la posizione iniziale di tutti punti del reticolo. Il numero di rotazioni che riportano il reticolo nella posizione iniziale è l'ordine dell'asse di simmetria di rotazione ed è calcolato semplicemente dividendo l'angolo giro per l'angolo di rotazione dell'asse stesso:

$$\mathcal{R} = \frac{360^\circ}{\theta}$$

Per trovare i possibili valori di n e successivamente calcolare l'ordine degli assi di rotazione possibili si deve tenere conto della disequazione trigonometrica:

$$-1 < \cos \theta < 1$$

E quindi i valori ammessi di n dovranno soddisfare la disequazione:

$$-1 < \frac{n-1}{2} < 1$$

$$-1 < n < 3$$

I valori possibili di n saranno quindi -1, 0, 1, 2, 3 ed i relativi angoli teta saranno:

$$n = -1 \Rightarrow \cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^\circ \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{360^\circ}{180^\circ} = 2 \Rightarrow \text{asse binario o di ordine 2}$$

$$n = 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3 \Rightarrow \text{asse binario o di ordine 3}$$

$$n = 1 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{360^\circ}{90^\circ} = 4 \Rightarrow \text{asse binario o di ordine 4}$$

$$n = 2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6 \Rightarrow \text{asse binario o di ordine 6}$$

$$n = 3 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ \Rightarrow \text{operazione nulla corrispondente a}$$

non compiere alcuna rotazione

Ecco finalmente elencati i possibili assi di rotazione di un reticolo cristallino. Si possono avere soltanto assi binari, ternari, quaternari e assi di ordine 6. Nessun asse di ordine cinque è permesso. Quindi reticoli cristallini in cui gli atomi del reticolo siano disposti in pentagoni non sono possibili. D'altronde anche qualitativamente tentando di disporre un pentagono regolare su di un piano incontreremmo delle difficoltà e dovremmo 'tappare' dei buchi.